TRASFORMAZIONI DEL PIANO E CONICHE

Una proposta didattica

In un mio precedente intervento, già pubblicato sul sito, mi sono occupato diffusamente della parabola, che dovrebbe essere trattata per prima per i suoi legami con equazioni e disequazioni di secondo grado.
Presento ora le altre coniche, mettendo in rilievo che l'intento di questo lavoro non è svolgere una trattazione completa delle stesse, quanto presentarne un'esposizione che si basa sulle trasformazioni del piano, mettendone così in rilievo l'importanza (Nei libri di testo esse sono svolte, *en passant*, dopo la geometria tradizionale e diventano così un inutile orpello. Mentre la trattazione della geometria mediante le trasformazioni, suggerita dal Programma di Erlangen di Klein del 1872, è presente già dal 1977 negli interessanti testi *Il metodo matematico* di Lombardo Radice e Mancini Proia, e *Matematica come scoperta* di Prodi.
L'uso delle trasformazioni, delle quali quella chiave è la simmetria bilaterale, è suggerita dalla natura, che, circa seicento milioni di anni fa, "scoprì" che essa era la più adatta nella costruzione degli esseri viventi, ed era economica: "due al prezzo di uno". E l'arte di tutti i popoli in ogni luogo testimonia come l'uomo ne sia stato influenzato.
Nel campo specifico della geometria, l'utilizzo delle trasformazioni consente:

- un costante uso dell'intuizione, prima fonte della conoscenza;
- di avere una guida che conduce alle dimostrazioni, verificando le proprie congetture;
- dimostrazioni semplici ed efficaci, che spesso i giovani possono intuire;
- l'introduzione della geometria analitica dall'inizio, e ciò, oltre a essere più stimolante per i giovani, risulta utile nello studio della fisica già dal primo anno;
- l'approfondimento del fondamentale concetto di gruppo, con la presentazione di gruppi anche in geometria, fornendo così un esempio di unitarietà di rami diversi della matematica.

Mediante le trasformazioni del piano:

- Le equazioni dell'ellisse e dell'iperbole canoniche si ottengono in modo meno complesso e più immediato, fornendone una semplice ma efficace costruzione.
- Le equazioni delle tangenti, ottenute con le trasformazioni, hanno tutte una stessa struttura e sono facilmente memorizzabili. Esse si conseguono in maniera semplice, con un unico procedimento che dà al tempo stesso le equazioni delle tangenti e le coordinate dei punti di contatto.

§ 1
Circonferenza

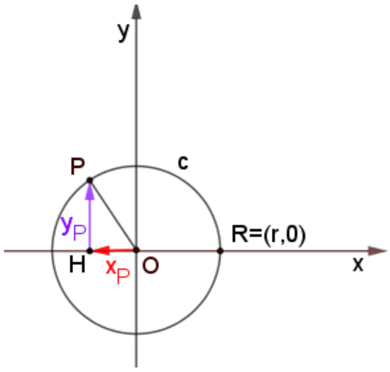
La Geometria analitica si può considerare un dizionario bilingue che consente di "tradurre" le proprietà delle figure in equazioni e disequazioni e viceversa.
In particolare, sappiamo che esiste una biiezione tra l'insieme delle rette del piano e le equazioni lineari in x e y, nel senso che:

- Assegnata una qualunque retta del piano, a essa si può associare una e una sola equazione di primo grado del tipo $ax+by+c=0$, con a e b non simultaneamente nulli, la quale è soddisfatta da tutte e sole le coordinate dei suoi punti.
- Viceversa, fissata una qualsiasi equazione lineare in x e y, tutte e sole le coppie ordinate di numeri reali che la verificano sono coordinate di punti che appartengono a un'unica retta r che è l'immagine dell'equazione.

Esaminiamo ora la circonferenza, l'altra figura che, assieme alla retta, è "perfetta" perché presenta infinite simmetrie (quali quelle dell'una e dell'altra?).

Sapete che:

dati un punto, sia O, e un numero **r**>0, diciamo circonferenza c il luogo dei punti P del piano che hanno da O distanza uguale a **r**: $\overline{OP}$=**r.** Cerchiamo allora, come fatto con la retta, di tradurre in termini di coordinate la caratteristica geometrica dei punti della circonferenza.



Nel consueto sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\vec{x}O\vec{y}$, sia **c** la circonferenza di centro O e raggio **r**.

Indicato con P=(x,y) un qualunque punto di c, e detta H la sua proiezione sull'asse x, applicando al triangolo rettangolo OP_xP il teorema di Pitagora segue che la proprietà geometrica si traduce in:

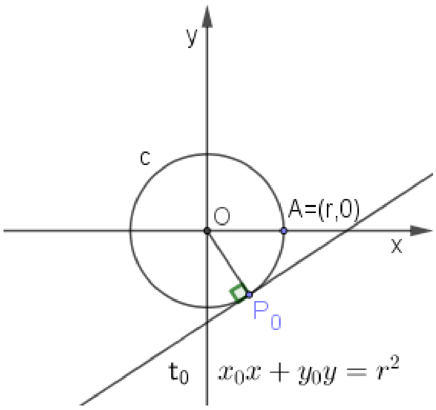
$$\textbf{(*)}\ \mathbf{x^2+y^2=r^2}.$$

Questa si chiama equazione della circonferenza c di centro O e raggio **r**.

Ribadiamo che ciò significa che:

<u>Tutte e sole le coordinate dei punti di c soddisfano l'equazione $\mathbf{x^2+y^2=r^2}$</u>.

Equazione della tangente a una circonferenza c in un suo qualsiasi punto.



Dalla geometria sappiamo che la tangente in un qualunque punto P_0 di una circonferenza c, di centro O, è perpendicolare alla retta OP_0 (figura).

Allora qual è il modo più semplice per scrivere l'equazione della tangente t_0 a una circonferenza c di centro O e raggio r nel suo punto $P_0=(x_0,y_0)$?....*Qualcuno dice, giustamente*: di determinare il coefficiente angolare della retta OP_0 e quindi trovare l'equazione della perpendicolare t_0 a essa per P_0.

È opportuna qualche precisazione per evitare….orrori o calcoli inutili. Per ciò, esaminiamo due casi.

1) La retta OP_0 è parallela all'asse $\vec{y}$: quindi t risulta parallela….*Chiaro*: t è parallela all'asse $\vec{y}$ ed ha equazione….*Bene*: $x=x_0$.
2) La retta OP_0 è generica. In tale eventualità si può economizzare: invero, di OP_0 ci interessa solo il coefficiente angolare, che com'è bene riprendere è m….*Bene*: $m=\frac{y_0}{x_0}$. Così quello di t è m'=….*OK*:

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{x_0}{y_0}.$$

Allora, l'equazione di **t** risulta….*Esatto*: $y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$. Essa, con facili calcoli, diventa $x_0x+y_0y=x_0^2+y_0^2$; e questa, poiché $P_0 \in c$, ne deve soddisfare l'equazione, così, $x_0^2+y_0^2= r^2$; quindi l'equazione di t_0 è:

$$(*)\ \ \mathbf{x_0x+y_0y=r^2}.$$

L'equazione precedente, facile da memorizzare, vale per **qualunque** $P_0 \in c$.

Esempi

1) Sia c la circonferenza di equazione $\mathbf{x^2+y^2=1}$ e $P_0=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ il punto fissato su essa.

   Determiniamo l'equazione della tangente t_0 a c in P_0. Dalla (#), t_0 diventa $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}$y=1, che si può scrivere 3x+4y-5=0.
2) Data la circonferenza c di equazione $\mathbf{x^2+y^2=1}$, sia $P_0=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

   Dalla (#), l'equazione della tangente t_0 in P_0 è, dalla (#), $-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$y=1, cioè: $x-\sqrt{3}y+2=0$.

Equazioni delle rette tangenti alla circonferenza c: $\mathbf{x^2+y^2=r^2}$ in un punto E a essa esterno.
Sappiamo trovare l'equazione della tangente a una circonferenza se un punto le appartiene. Allora, in analogia a quanto fatto per la parabola?....*Esatto*:

- Consideriamo l'equazione della tangente in un qualunque punto di c, $P_0=(x_0,y_0)$: $\mathbf{x_0x+y_0y=r^2}$.
- Imponiamo che essa passi per E, cioè che le sue coordinate ne soddisfino l'equazione, e teniamo conto del fatto che le coordinate di P_0 devono verificare l'equazione di c, quindi: $\mathbf{x_0^2+y_0^2=r^2}$.

Vediamo come questo procedimento determina, allo stesso tempo, le coordinate dei punti di tangenza e le equazioni delle due tangenti per E.

Esempio
Siano c di equazione $\mathbf{x^2+y^2=1}$ ed $E(-\frac{1}{5},-\frac{7}{5})$. (Abituatevi a verificate innanzitutto che E sia esterno a c).
Come provato, l'equazione della tangente a c in un suo qualsiasi punto $P_0=(x_0,y_0)$ è (##) $\mathbf{x_0x+y_0y=1}$, in cui x_0 e y_0 devono soddisfare l'equazione di c, quindi (*) $\mathbf{x_0^2+y_0^2=1}$.
Imponiamo ora che la retta di equazione (##) passi per E, sostituendo l'ascissa e l'ordinata di E rispettivamente a x e y nella (##): $-\frac{1}{5}\mathbf{x_0}-\frac{7}{5}\mathbf{y_0=1}$, ossia $\mathbf{x_0+7y_0}=-5\mathbf{1}$, dalla quale: (\$) $\mathbf{x_0}=-5-7\mathbf{y_0}$. Poiché come evidenziato x_0 e y_0 devono soddisfare la (*): $(-5-7\mathbf{y_0})^2+y_0^2=1$. Svolgendo i semplici calcoli, abbiamo che: $25+70\mathbf{y_0}+49\mathbf{y_0}^2+y_0^2-1=0$, cioè $50\mathbf{y_0}^2+70\mathbf{y_0}+24=0$, che dividendo ambo i membri per 2, diviene $25\mathbf{y_0}^2+35\mathbf{y_0}+12=0$, il cui discriminante è $\Delta=35^2-1200=25>0$. Le soluzioni sono $\mathbf{y_0}=\frac{-35\mp5}{50}$; cioè $\mathbf{y_0}'=-\frac{4}{5}$ e $\mathbf{y_0}''=-\frac{3}{5}$. Dalla (\$) otteniamo $\mathbf{x_0}'=\frac{3}{5}$ e $\mathbf{x_0}''=-\frac{4}{5}$.
Allora i punti $P_0'=(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$ e $P_0''(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$ sono le coordinate dei punti di contatto, che, sostituite nella (##) dànno le equazioni delle tangenti a c passanti per $E=(-\frac{1}{5},-\frac{7}{5})$:

- $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y=1$, cioè $3x-4y-5=0$;
- $-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y=1$, ossia $4x+3y-5=0$.

Equazione della circonferenza con centro in $C=(x_c,y_c)$ e raggio r.
Per scriverla, basta prendere l'avvio dall'equazione $\mathbf{x^2+y^2=r^2}$ ed eseguire la traslazione τ <u>del piano</u> di
vettore $\overrightarrow{OC}$. Infatti, la traslazione è un'isometria e conserva quindi le distanze; e sapete inoltre che per
ottenere la traslata c' di c in τ, basta eseguite nell'equazione precedente le sostituzioni:

$$\begin{cases} x\to x-x_c, \\ y\to y-y_c. \end{cases}$$

Così, c' ha equazione: (#) $\mathbf{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r^2}$.
Esempio
Scrivere l'equazione della circonferenza di centro C=(-3,1) e raggio 2.
Dalla (#) $\mathbf{(x+3)^2+(y-1)^2=4}$, che svolgendo i calcoli diventa $x^2+y^2+6x-2y+5=0$.
In generale, eseguendo i calcoli, la (#) diventa $x^2+y^2-2x_cx-2y_cy+x_c^2+y_c^2-r^2=0$; la quale, posto $\alpha=-2\mathbf{x_c}$, $\beta=-2y_c$ e $\gamma=x_c^2+y_c^2-r^2$, si scrive infine (\$) $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$.
Osservate che nella (\$):

- I coefficienti di x^2 e y^2 sono entrambi uguali a uno.
- non c'è il termine in xy (ciò indica che la circonferenza è invariante per ogni rotazione attorno al suo centro).

Dalle posizioni fatte, $\mathbf{x_c}=-\frac{\alpha}{2}$, $\mathbf{y_c}=-\frac{\beta}{2}$ ed $\mathbf{r^2}=(\frac{\alpha}{2})^2+(\frac{\beta}{2})^2-\gamma$: deve quindi risultare $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma>0$.

In conclusione, l'equazione $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ è quella di una circonferenza se e solo se $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma>0$.

N.B:

1. Se abbiamo un'equazione del tipo $hx^2+hy^2+kx+ly+m=0$ - $h\neq0$ - cioè simile alla ($), ma in cui i coefficienti di x^2 e y^2 sono uguali tra loro ma non a uno, per trovare $\mathbf{x_c}$, $\mathbf{y_c}$ ed $\mathbf{r^2}$ prima dobbiamo dividerne ambo i membri per h e ottenere la ($) e poi procedere.
2. Se fosse data un'equazione del tipo ($), perché essa sia quella di una circonferenza, si deve verificare che $(\frac{\alpha}{2})^2+(\frac{\beta}{2})^2-\gamma>0$.

   A esempio, l'equazione $x^2+y^2-2x+4y+8=0$ $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma=\frac{4}{4}+\frac{16}{4}-8=1+4-8=-3$: quella data **non è** l'equazione di una circonferenza.

Equazione della tangente a una circonferenza generica in un suo punto.

Sia k la circonferenza centro $C=(x_c,y_c)$ e raggio r, e $P_0'=(x_0',y_0')$ un suo punto qualunque; l'equazione di k è: $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r^2$, e, come abbiamo visto, k è la traslata di c di equazione $\mathbf{x^2+y^2=r^2}$ in τ: $\overrightarrow{OC}$.

Poiché la τ è un'isometria, trasforma rette in rette, e muta rette parallele in rette parallele e rette perpendicolari in rette perpendicolari, la corrispondente di t_0, t_0', è perpendicolare alla retta CP_0' e quindi t_0' è tangente a k. Allora, indicato con $P_0=(x_0,y_0)$ un qualsiasi punto di c, l'equazione di t_0' si ottiene da quella di t_0 mediante le sostituzioni precedenti:

$$(\#)\ (\mathbf{x_0}-x_c)(x-x_c)+(\mathbf{y_0}-y_c)(y-y_c)=\mathbf{r^2}.$$

Se invece il punto è esterno a k, sia A=(a,b), basta procedere come fatto per c: $x^2+y^2=r^2$.

- Si scrive l'equazione della tangente a k in un suo qualunque punto $P_0'=(x_0',y_0')$.
- S'impone che tale tangente passi per A e si determinano le coordinate dei punti di tangenza, che sostituite nella (#) dànno le equazioni cercate.

Esempi

- Scrivere l'equazione della tangente alla circonferenza c: $x^2+y^2+12x-8y+44=0$ nel suo punto A=(-4,6).

  Troviamo innanzitutto le coordinate del centro e la misura del raggio: $x_c=-6$, $y_c=4$, $r=2\sqrt{2}$; e scriviamo mediante essi l'equazione di c $(x+6)^2+(y-4)^2-8=0$.

  Applichiamo ora la (#): $2(x+6)+2(y-4)=8$; da questa $x+y-2=0$.
- Scrivere le equazioni delle tangenti alla circonferenza c: $x^2+y^2+12x-8y+44=0$ per il punto A=(-2,4).

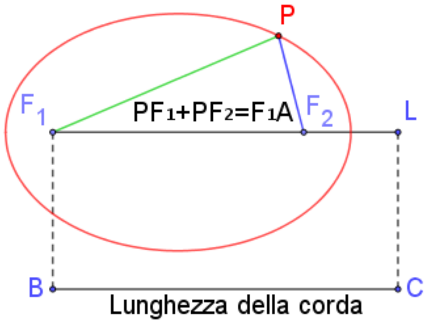
  Dopo avere verificato che **A** è esterno a **c**, procediamo come suggerito.

  Determiniamo innanzitutto le coordinate del centro C e il raggio r di c: C=(-6,4), $r=2\sqrt{2}$. Usiamo poi la (#) della pagina precedente, che dà l'equazione della tangente t_0 a c in un suo qualunque punto $P_0=(x_0,y_0)$: (*) $(\mathbf{x_0}+6)(x+6)+(\mathbf{y_0}-4)(y-4)=\mathbf{8}$ - e imponiamo che passi per A: $4(\mathbf{x_0}+6)+0(\mathbf{y_0}-4)=8$; da questa $\mathbf{x_0}+6=2$, cioè $\mathbf{x_0}=-4$. Poiché P_0 appartiene a c, le sue coordinate ne devono soddisfare l'equazione: $(x_0+6)^2+(y_0-4)^2-8=0$; la quale, sostituendo -4 a $\mathbf{x_0}$, dà $4+y_0^2-8y_0+16-8=0$, cioè $y_0^2-8y_0+12=0$. Le sue soluzioni sono $\mathbf{y_0}=2$ e $\mathbf{y_0}=4$. Così i punti di c dai quali le tangenti a essa passano per A sono:

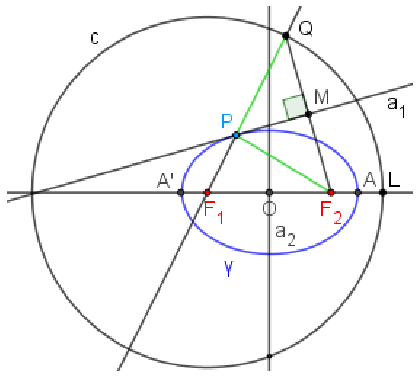
$$\begin{cases}\mathbf{x_0}=-4\\ \mathbf{y_0}=2\end{cases}\quad \begin{cases}\mathbf{x_0}=-4\\ \mathbf{y_0}=4.\end{cases}$$

Le equazioni delle tangenti a **c** per A si ottengono sostituendo le coppie ordinate di valori trovati nella (*) della pagina precedente: x+y=2 e x-y=-6.

§ 2
Ellisse

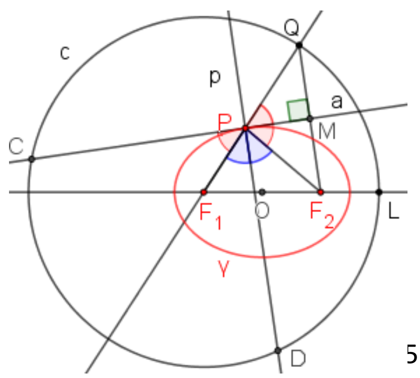


Per introdurre in modo esauriente questa conica prendiamo le mosse da un problema concreto.
Una signora che vuole realizzare nel proprio giardino una bella aiuola il cui contorno abbia una forma originale e, al proprio interno, due fontane.
Per realizzarla il giardiniere pianta due pali nei punti in cui devono esserci le fontane, si procura una robusta corda più lunga della distanza tra le fontane, conficca vicino alle estremità due grossi anelli che inserisce nei pali. Poi tende la corda tirandola per un suo punto con un pezzo di legno appuntito, e, sempre tenendola tesa, fa un giro completo, mantenendo la punta sempre sul terreno. Ottiene così una curva γ di forma ovale (figura): qual è la caratteristica di ogni punto P di γ?....*Chiaro*: che la somma delle sue distanze dai punti F_1 ed F_2 è costante.
La figura ottenuta è chiamata **ellisse**: essa si dice costruita col "metodo del giardiniere".
La realizzazione di una qualunque ellisse si può ottenere geometrizzando il "metodo del giardiniere" nel semplice modo seguente. Sappiamo che: il luogo geometrico dei punti del piano che hanno distanza costante da un punto dato è una circonferenza. Allora, dati due punti F_1 ed F_2, di cui O sia il punto medio, consideriamo su una delle semirette che essi determinano - a esempio F_1F_2 - un punto A tale che $\overline{F_1A}>\overline{F_1F_2}$ (quindi $\overline{F_1A}$ rappresenta la lunghezza della corda del giardiniere).



Esaminiamo la circonferenza **c** di centro F_1 e raggio $\overline{F_1L}$. Chiamato Q un qualunque punto qualsiasi di **c**, tracciamo la retta F_1Q e l'asse **a** del segmento F_2Q e diciamo P il loro punto comune.
In forza della costruzione $\overline{PF_2}=\overline{PQ}$, quindi $\overline{F_1Q}=\overline{F_1P}+\overline{PQ}=\overline{F_1P}+\overline{PF_2}$; al variare di Q cu **c**, il punto P descrive il luogo γ dei punti tali che:
<u>la somma s delle distanze da F_1 ed F_2 è costante</u>, perché s=$\overline{F_1Q}=\overline{F_1B}$.
γ è una conica che, per via della costruzione, è simmetrica rispetto alle rette F_1F_2 e a_2, quindi anche relativamente a O.

Al….fuoco!
Solitamente F_1 ed F_2 sono detti fuochi, ma, in genere, non se ne spiega il motivo. La costruzione eseguita rende conto di questa denominazione.
Infatti (figura), $M\hat{P}Q$ è simmetrico di $F_2\hat{P}M$ rispetto alla retta **a** e di $C\hat{P}F_1$ rispetto a O, quindi: $F_2\hat{P}M$ è isometrico a $C\hat{P}F_1$. Tracciata allora la perpendicolare p ad a per P, $F_1\hat{P}D$ e $E\hat{P}F_2$ sono isometrici perché complementari degli angoli isometrici $C\hat{P}F_1$ e $F_2\hat{P}M$.

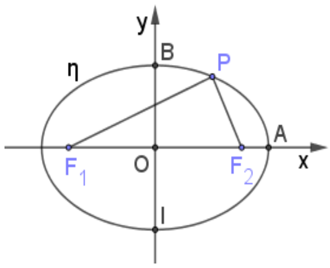


Quindi, se pensiamo γ costituita da un sottile strato di materiale riflettente, i raggi luminosi provenienti da F_1 si riverberano in F_2 e viceversa: così su essi si concentra energia termica e vanno a fuoco.
Adesso diamo la *definizione*

Diciamo ellisse il luogo dei punti tale che <u>è costante la somma delle distanze di un suo qualsiasi punto da due punti F_1 ed F_2, detti fuochi</u>.

Dall'equazione della circonferenza k di centro O e raggio uno a quella dell'ellisse canonica, cioè che ha come assi di simmetria gli assi cartesiani.

Introduciamo nel piano il seguente sistema di coordinate: O, punto medio del segmento F_1F_2, sia l'origine, l'asse $\vec{x}$ risulti la retta F_1F_2, orientata da F_1 verso F_2, e l'asse $\vec{y}$ sia l'associato dell'asse $\vec{x}$ nella rotazione positiva di un angolo retto di centro O (figura). Siano poi F_2=(c,0), A=(a,0) e B=(0,b) – nel grafico a>b – con A e B le intersezioni dei due semiassi positivi con la curva η.



In tale sistema la proprietà caratteristica sottolineata prima conduce, con calcoli lunghi e laboriosi, all'equazione:

$$(\#)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Essa viene detta equazione <u>canonica</u> (spiegarne il significato) dell'ellisse η.

A essa si può giungere però in modo semplice e istruttivo, prendendo le mosse dall'equazione della circonferenza **c** di equazione $x^2+y^2=1$.

Infatti, sia α l'affinità di equazioni: (*) $\begin{cases} x'=ax \\ y'=by, \text{ con a e b diversi da zero.}\end{cases}$	L'affinità inversa di α, α^{-1}, ha equazioni: (#') $\begin{cases} x=\frac{x'}{a} \\ y=\frac{y'}{b}.\end{cases}$

Poiché il riferimento cartesiani non è cambiato, le (#') si possono rimpiazzare con le sostituzioni:

$$(\#\#)\ \begin{cases} x\rightarrow\frac{x}{a}, \\ y\rightarrow\frac{y}{b}.\end{cases}$$

Allora, le equazioni della curva η trasformata della circonferenza **c** di equazione $x^2+y^2=1$ è la (#):

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}.$$

È chiaro che η è simmetrica rispetto agli assi, quindi all'origine O.

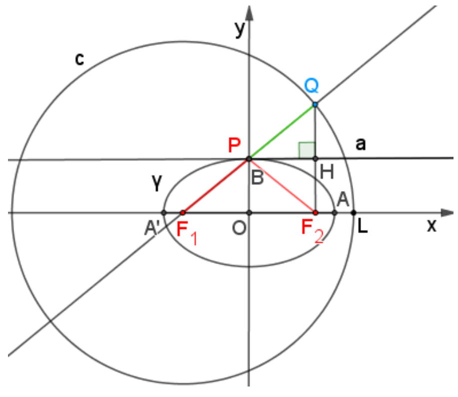
Una proprietà caratteristica

Notiamo che, se il punto Q coincide con l'intersezione della retta F_1B con c, allora P≡B

Inoltre, per la simmetria della costruzione rispetto all'asse y, il triangolo F_1F_2P è isoscele e $\overline{PF_2}=\overline{PF_1}=\overline{OA}$. Allora, dal triangolo OF_2P, rettangolo in O, per il teorema di Pitagora:

$$\mathbf{a^2=b^2+c^2}.$$

Da questa, noti due di essi si determina il terzo.



Punti interni ed esterni a η.

Dall'equazione (#) è immediato – fatelo come esercizio – che:

$$\mathbf{-a\le x\le a} \text{ e } \mathbf{-b\le y\le b}.$$

Così, una retta p parallela all'asse y interseca η solo per **-a≤x≤a**, nei punti H e H' simmetrici rispetto all'asse x, quindi con la stessa ascissa h e ordinate opposte, rispettivamente k e -k: H=(h,k), H'=(h,-k) (figura).

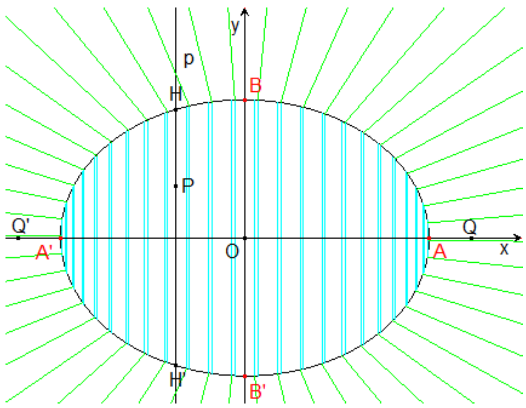
Allora se diciamo P un punto di]H,H'[, è P=(h,y_P), con $-k<y_P<k$, dunque, a più forte ragione $-b<y_P<$b.

In forza di ciò, per -a<x<a, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{{y_P}^2}{b^2}<1$:

i punti che soddisfano queste disuguaglianze, come suggerisce il grafico, sono detti *interni* all'ellisse.

Se la retta p interseca l'asse delle ascisse in un punto Q=(q,0) tale che |q|>a, cioè: q>a ∨ q<-a, $\frac{q^2}{a^2}>\mathbf{1}$; allora, a più forte ragione, per tutti i punti E=(q,y), con y≠0, $\frac{q^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>\mathbf{1}$.

I punti trovati, come indica l'intuizione, sono detti *esterni* all'ellisse.



Equazione della tangente a un'ellisse in un suo punto.

Abbiamo imparato che l'equazione della tangente a una circonferenza c in un suo qualunque punto P$_0$=(x$_0$,y$_0$) è:

(*) $x_0x+y_0y=1$.

Poiché in un'un'affinità una retta si trasforma in una retta e si conserva l'intersezione di due rette, per trovare l'equazione della tangente all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$=1 in un suo qualsiasi punto, basta trasformare la (*) mediante le sostituzioni (##) di α della pagina precedente. Otteniamo così che $x_0x+y_0y=1$ diventa $\frac{x_0}{a}\frac{x}{a}+\frac{y_0}{b}\frac{y}{b}$=1, cioè:

$$(\$)\ \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

Esempi

Determinare l'equazione della tangente t all'ellisse γ di equazione $\frac{x^2}{4}+y^2$=1 nel suo punto A=$(\frac{8}{5},-\frac{3}{5})$.

Dalla (*), l'equazione della tangente t in A è: $\frac{\frac{8x}{5}}{4}-\frac{3y}{5}$=1, cioè $\frac{2x}{5}-\frac{3y}{5}$=1, da cui 2x-3y =5.

Trovare l'equazione e della tangente t all'ellisse γ di equazione $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}$=1 nel suo punto A=$(\frac{6}{5},\frac{4}{5})$.

Dalla (*), l'equazione della tangente in A è: $\frac{\frac{6x}{5}}{8}+\frac{4y}{5}$=1, cioè $\frac{6x}{40}+\frac{4y}{5}$=1, da cui $\frac{3x}{20}+\frac{4y}{5}$=1, che diventa 3x+16y=20.

Se il punto considerato è esterno all'ellisse, possiamo ragionare come in precedenza:

- Scriviamo l'equazione della tangente t a γ in un suo qualunque punto P$_0$=(x$_0$,y$_0$).
- Imponiamo che t passi per P$_0$ e usiamo la condizione di appartenenza di P$_0$ a γ.

Esempio

<u>Trovare l'equazione e della tangente t all'ellisse γ di equazione</u> $\frac{x^2}{4}+y^2$=1 <u>condotte per il punto</u> B=$(\frac{2}{5},-\frac{7}{5})$ <u>a essa esterno (verificatelo)</u>.

Procediamo come indicato.

Dalla (#), l'equazione della tangente t a γ in un suo qualunque punto P$_0$=(x$_0$,y$_0$) è $\frac{x_0x}{4}$ +, y$_0$y cioè (£) $x_0x+4y_0y=4$; e, poiché P$_0$ sta su γ, $\frac{{x_0}^2}{4}+{y_0}^2$=1, ovvero (**) ${x_0}^2+4{y_0}^2$=4.

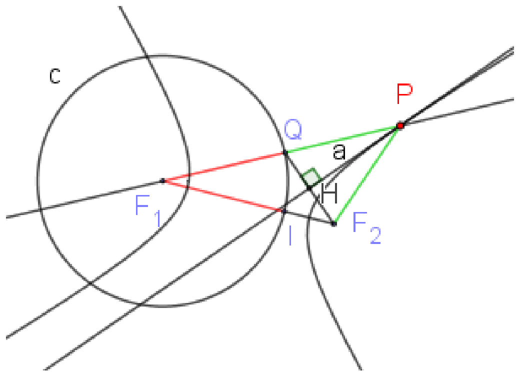
Imponiamo che t passi per B, sostituendo ordinatamente le sue coordinate x e y:
$\frac{2}{5}x_0-\frac{28}{5}y_0=4$, da cui $2x_0-28y_0=20$, cioè $x_0-14y_0=10$. Da questa (&) $x_0=10+14y_0$, che posta nella (**) della pagina precedente dà $(10+14y_0)2+4y_0^2-4=0$. Svolgendo i calcoli abbiamo $100+280y_0+196y_0^2+4y_0^2-4=0$, ovvero $200y_0^2+280y_0+96=0$, che possiamo scrivere $25y_0^2+35y_0+12=0$. Questa, poiché $\Delta=25>0$, ammette due soluzioni reali e distinte: $y_0=\frac{-35\mp5}{50}$, dalla quale $y_0'=-\frac{4}{5}$, $y_0''=-\frac{3}{5}$. Tali valori sostituiti nella (&) dànno rispettivamente $x_0'=-\frac{3}{5}$, $x_0''=\frac{8}{5}$; i punti di contatto sono:

$$\begin{cases} x_0'=-\frac{3}{5} \\ y_0'=-\frac{4}{5} \end{cases};\qquad \begin{cases} x_0''=\frac{8}{5} \\ y_0''=-\frac{3}{5} \end{cases}.$$

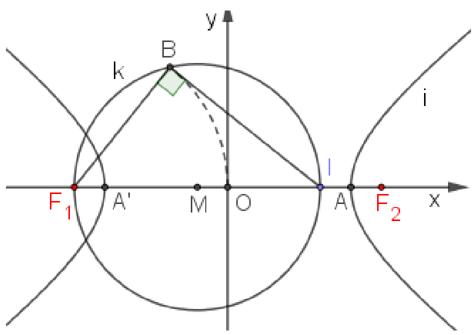
Le equazioni delle tangenti t_1 e t_2 si hanno sostituendo le coppie ordinate nella (£) $x_0x+4y_0y=4$; t_1: $-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y=4$, cioè $3x+4y+4=0$, t_2: $\frac{8}{5}x-\frac{3}{5}y=4$, ossia $8x-3y-4=0$.

§ 3

IPERBOLE



Abbiamo scoperto che il luogo dei punti del piano tali che la somma delle loro distanze da due punti dati è costante è una conica che abbiamo chiamato ellisse. Nasce spontanea la domanda:
esiste <u>il luogo dei punti del piano tali che il valore assoluto **v** della differenza delle loro distanze da due punti dati è costante</u>?
Per rispondere a questa domanda modifichiamo un po' la costruzione dell'ellisse come segue (il grafico è a destra).
Dati i punti F_1 ed F_2, sia I un punto interno al segmento F_1F_2.
Tracciamo la circonferenza c di centro F_1 e passante per I, e la retta F_1Q, con Q su c. Disegniamo poi l'asse a del segmento F_2Q; **a** interseca F_1Q in P tale che: $\overline{PF_2}=\overline{PQ}$.
Poiché $\overline{PQ}=\overline{PF_1}-\overline{F_1Q}$ e $\overline{PF_2}=\overline{PF_1}-\overline{F_1Q}$, abbiamo $\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=\overline{F_1Q}=\overline{F_1Q}$, che è costante ($\overline{PF_1}>\overline{PF_2}$ perché in figura Q è più vicino a F_2 che a F_1. In caso contrario, nell'equazione precedente prenderemmo $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|$).
Il luogo congetturato esiste: è una conica chiamata **iperbole**.



Un'interessante osservazione che sarà utile in seguito.
Se chiamiamo B una delle intersezioni della circonferenza k di centro il punto medio M di F_1I e diametro $\overline{F_1I}$ con la circonferenza di centro F_1 e raggio $\overline{F_1O}$ origina il triangolo F_1BI, rettangolo in B perché….*Chiaro*: è inscrittto in una delle semicirconferenze che l'asse x determina in k.
Allora, dal teorema di Pitagora:

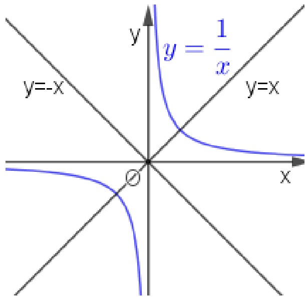
$$(*)\ \overline{BI}^2=\overline{F_1I}^2-\overline{BF_1}^2.$$

Posto adesso $\overline{F_1I}$=a, $\overline{F_1O}$=c e $\overline{BI}$=b, la (*) diventa:

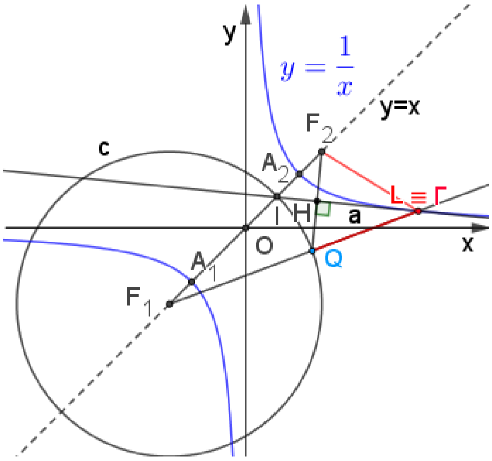
$$(**)\ b^2=a^2-c^2.$$

<u>Questa, noti due tra a, c e b, consente d'individuare l'iperbole i</u>.

Una "strana coincidenza"

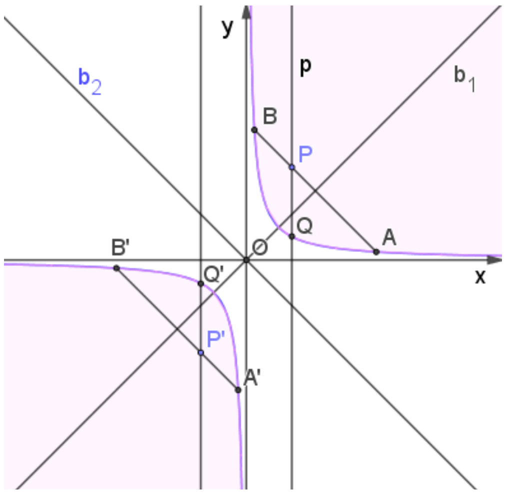


Prendiamo l'avvio dalla semplice funzione $y=\frac{1}{x}$, che, come sapete, esprime la proporzionalità inversa. Il suo grafico, che conoscete, è a fianco. Esso è simmetrico rispetto all'origine e alle bisettrici degli angoli degli assi cartesiani. Proviamo che γ è un'iperbole.
Le considerazioni precedenti e il grafico suggeriscono che i punti F_1 ed F_2 devono stare sulla bisettrice di primo e terzo quadrante.
Eseguiamo allora la costruzione precedente, prendendo i punti F_1 e F_2 sulla bisettrice b_1 di primo e terzo quadrante, simmetrici rispetto all'origine, tali che $F_1=(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $F_2=(\sqrt{2},\sqrt{2})$ - così che $\overline{F_1F_2}=4$ (figura successiva).
Sia poi I il punto interno al segmento F_1F_2 tale che $\overline{F_1I}=2\sqrt{2}$. Indicati con c la circonferenza di centro F_1 e raggio $\overline{F_1I}$ e con Q un qualunque punto di c, tracciamo la retta F_1Q, l'asse **a** del segmento F_2Q e chiamiamo L il loro punto comune.



Al variare di Q su c L descrive un'iperbole λ e "sembra" che λ≡γ. Proviamo che è così.
Indichiamo con Γ il punto comune a γ e all'asse **a** del segmento F_2Q; è allora $\overline{\Gamma F_2}=\overline{\Gamma Q}$, e $\overline{F_1Q}=\overline{F_1\Gamma}-\overline{Q\Gamma}$, cioè $\overline{F_1Q}=\overline{F_1\Gamma}-\overline{F_2\Gamma}$: dunque Γ verifica la proprietà che caratterizza λ, quindi L≡Γ e λ≡γ.
Al variare di Q il luogo λ è così espresso dalla funzione $y=\frac{1}{x}$ - $x\neq0$ - che risulta pertanto un'iperbole.

Punti interni e punti esterni a all'iperbole γ di equazione $y=\frac{1}{x}$



L'intuizione suggerisce di considerare i punti della parte colorata come *interni* a γ. Cerchiamo delle relazioni che caratterizzino ciò mediante precise relazioni numeriche.
Consideriamo un qualsiasi punto A di γ di ascissa positiva, chiamiamo B il suo simmetrico rispetto alla bisettrice b_1 di primo e terzo quadrante e diciamo P un qualunque punto appartenente a]H,H'[. Tracciata per P la perpendicolare **p** all'asse x, essa interseca γ in Q ed è: al variare di A su γ e di P in]A,B[è individuata la parte colorata del primo quadrante, ed è $\mathbf{y_P>y_Q}$. Per la simmetria di γ rispetto a O, nel secondo quadrante risulta $\mathbf{y_{P'}<y_{Q'}}$. I punti per cui si verificano le disuguaglianze indicate sono detti interni all'iperbole. I punti che non appartengono a γ o non soddisfano le disuguaglianze segnalate vengono chiamati *esterni* all'iperbole.

Tangente alla iperbole γ di equazione $y=\frac{1}{x}$ *in un suo qualunque Punto* $H=(x_0,y_0)$

Sia r una retta qualsiasi per H di equazione $y-y_0=m(x-x_0)$, cioè (*) $y= mx-mx_0+y_0$. Per trovare la tangente t a γ in H imponiamo che il discriminante Δ dell'equazione risolvente il sistema delle equazioni di t e (*) sia uguale a zero e teniamo conto del fatto che H ∈ γ, quindi $x_0y_0=1$.

$$\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ y= y= mx-mx_0+y_0. \end{cases}$$

Sostituendo la y della prima equazione nella seconda abbiamo che l'equazione risolvente è: $\frac{1}{x}$=y_0+mx-mx_0, cioè 1=y_0x+mx^2-mx_0x, che, ordinata diviene mx^2+(y_0-mx_0)x-x_0y_0=0, la quale, poiché x_0y_0=1, si scrive mx^2+(y_0-mx_0)x-1=0.
Il suo discriminante è $\Delta=(y_0-mx_0)^2+4m=y_0^2-2m+m^2x_0^2+4m=(y_0+mx_0)^2$; dunque, Δ=0 se e solo se $(y_0+mx_0)^2=0$, cioè $y_0+mx_0=0$, da cui $m=-\frac{y_0}{x_0}$.
Così l'equazione della tangente t a γ in H è: $y-y_0=-\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)$, cioè $x_0y-x_0y_0+y_0x-x_0y_0=0$, o anche, dato
che x_0y_0=1, (*) $y_0x+x_0y=2$, che diventa infine:

$$(\#)\ \frac{\mathbf{y_0x}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{x_0y}}{\mathbf{2}}=\mathbf{1}.$$

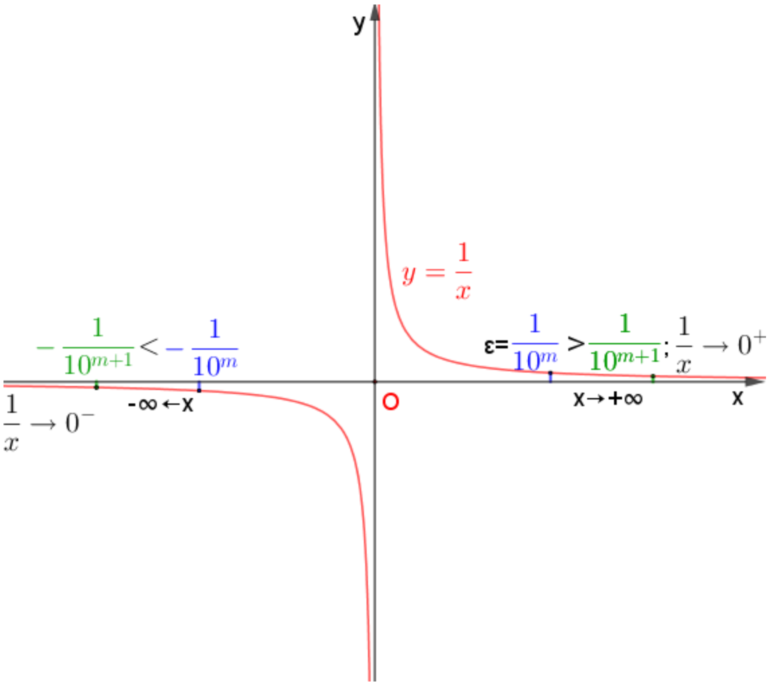
Asintoti

Asintoti orizzontali

Esaminiamo adesso l'andamento di γ che esprime la funzione $y=\frac{1}{x}$, agli estremi del suo dominio. Costruiamo le successive tabelle che esprimono i valori x e quelli corrispondenti di $y=\frac{1}{x}$.
Per ciò, costruiamo le seguenti tabelle che esprimono i valori x e quelli corrispondenti di $y=\frac{1}{x}$. Per semplicità e chiarezza usiamo per x potenze di dieci con esponente naturale.

x>0	$y=\frac{1}{x}$	x<0	$y=\frac{1}{x}$
1	1	-1	-1
10	1/10=0,1	-10	-1/10=-0,1
10^2	$1/10^2$=0,01	-10^2	$-1/10^2$=-0,01
10^3	$1/10^3$=0,001	-10^3	$-1/10^3$=-0,001
……	….	……	….
10^6	$1/10^6$=0,000.000.1	-10^6	$-1/10^6$=-0,000.000.1
….	….	….	….
….	….	….	….
10^n	$1/10^n$=0,000….000.1	-10^n	$-1/10^n$=-0,000….000.1
….	1,2,3……n	….	1,2,3……..n
….	….	….	….

La prima tabella ci dice che, all'aumentare di n, quindi di x, questa può diventare maggiore di qualunque numero positivo k assegnato (per quanto grande); la seconda, che i corrispondenti valori di y divengono minori di qualsiasi numero positivo ε (per quanto piccolo). Ciò s'indica in breve col seguente simbolismo:
per $x\to+\infty$, $y\to0$, precisamente $y\to0^+$, cioè assumendo sempre valori positivi.
Poiché y>0, per $x\to+\infty$, la distanza del corrispettivo punto di γ dall'asse x, $d\to0$.
<u>Questa circostanza si suole esprimere dicendo che l'asse x è asintoto orizzontale destro</u> (Asintoto è un termine che viene dal greco antico e significa che non tocca).

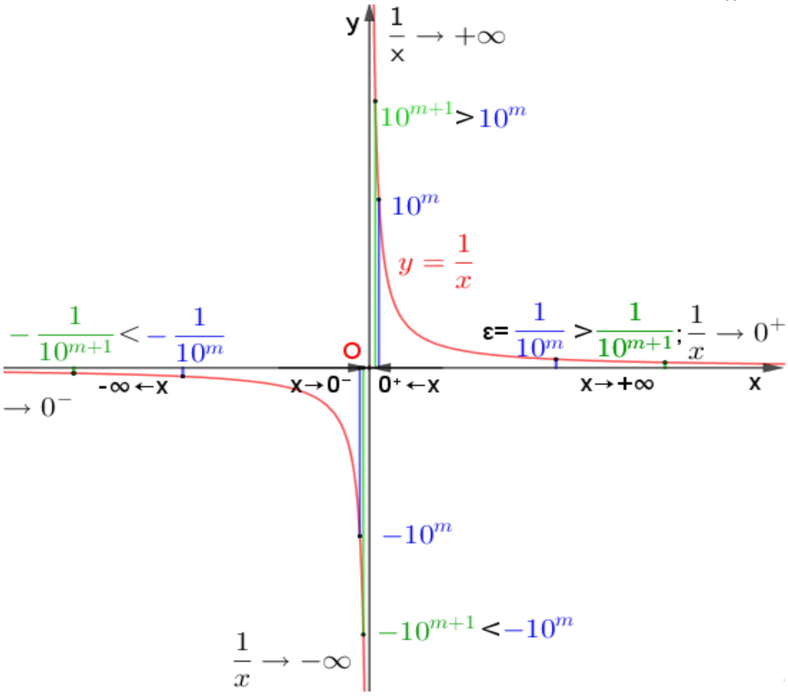


Poiché come osservato in precedenza l'iperbole γ è simmetrica rispetto all'origine O - scambia quindi x con -x e y con -y – possiamo dedurre che: per x⟶-∞, y⟶0^-, cioè y⟶0, assumendo sempre valori negativi.
(La terza tabella e quarta forniscono il riscontro numerico. Infatti, la terza assicura che x, può diventare minore di un qualsiasi numero -k, comunque si fissi k>0, per quanto grande). La quarta indica che i relativi valori di y – negativi - possono diventare, in valore assoluto, minori di qualunque numero positivo assegnato (per quanto piccolo).
Poiché |y|>0: per x⟶+∞, la distanza del corrispettivo punto di γ dall'asse x, d⟶0.
Questa situazione si suole esprimere dicendo che l'asse $\vec{x}$ è anche asintoto orizzontale sinistro. E, di conseguenza esso si dice asintoto orizzontale completo.

Asintoti verticali
Vediamo ora come si evolve la curva γ in un intorno destro di zero di dimensione σ>0, $I(0^+)_\sigma$, per σ *arbitrariamente piccolo*.
Per ciò, basta notare che l'iperbole γ è simmetrica rispetto alla bisettrice b_1 di primo e terzo quadrante di equazione y=x. Infatti, nella simmetria s_{b_1} x e y si scambiano i ruoli:
come per x⟶+∞, y=$\frac{1}{x}$⟶0^+, così se x⟶0^+, y=$\frac{1}{x}$ ⟶+∞ (prime due tabelle).

x>0	y=$\frac{1}{x}$	x<0	y=$\frac{1}{x}$
1 1/10=0,1 $1/10^2$=0,01 $1/10^3$=0,001 …. $1/10^6$=0,000.000.1 …. $1/10^n$=0,000….000.1 1,2,3…...n	1 10 10^2 10^3 …… 10^6 …. 10^n ….	-1 -1/10=-0,1 $-1/10^2$=-0,01 $-1/10^3$=-0,001 …. $-1/10^6$=-0,000.000.1 …. $-1/10^n$=-0,000….000.1 1,2,3……..n	-1 -10 -10^2 -10^3 …… -10^6 …. …. -10^n

Per ottenere l'andamento di γ per x⟶0⁻ è sufficiente riflettere sul fatto che essa è simmetrica rispetto all'origine per concludere che (figura pagina seguente): per x⟶0⁻, $\frac{1}{x}$ ⟶-∞.



Così anche l'asse $\vec{y}$ si dice asintoto verticale completo.

Equazione canonica dell'iperbole

Abbiamo trovato l'equazione dell'ellisse canonica prendendo le mosse dalla circonferenza di equazione (**) $x^2+y^2=1$. Applicando infatti l'affinità α definita dalle equazioni x'=ax, y'=by abbiamo ottenuto le sostituzioni: x⟶$\frac{x}{a}$, y⟶$\frac{y}{b}$, mediante le quali la (**) si trasforma in $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Seguiamo un procedimento analogo per determinare l'equazione canonica dell'iperbole prendendo l'avvio dall'iperbole di equazione xy=1. Innanzitutto, tenete a mente che l'equazione canonica deve avere gli assi cartesiani come assi di simmetria; quindi x e y si devono presentare solo a potenza pari, ragionevolmente al quadrato. Allora, quale affinità α_1 suggerite perché le sostituzioni di x e y da essa assegnate facciano ottenere questo risultato?....*Benissimo*, se α_1 è data dalle sostituzioni x⟶$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, e y⟶$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}$, da xy=1 otteniamo $(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})$, dalla quale:

$$(\#)\ \boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}.$$

Questa è l'equazione cercata, che si può scrivere anche $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$. Che il suo grafico γ' sia un'iperbole deriva dall'osservazione di pagina 8.

Tangente a γ in un suo punto H=(x_0,y_0)

Per l'ellisse η sotto la forma canonica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ abbiamo dimostrato, mediante l'affinità che dà le sostituzioni x⟶$\frac{x}{a}$ e y⟶$\frac{y}{b}$, che l'equazione della tangente in un suo punto H=(x_0,y_0) è $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$. Quale congettura vi viene spontanea per l'equazione della tangente all'iperbole γ sotto la forma canonica (#) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$?....*Dite*:

$$(\#\#)\ \frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

Ebbene la vostra supposizione è corretta. Proviamola.

Trasformiamo l'equazione della tangente all'iperbole di equazione $y=\frac{1}{x}$, cioè $x\cdot y=1$ in un suo qualunque punto (*) $y_0x+x_0y=2$ (pagina 10) mediante α_1 data dalle sostituzioni: $x\to\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, e $y_0\to\frac{x}{a}-\frac{y}{b}$.

Otteniamo $(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b})(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})+(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b})(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})=2$, dalla quale, svolgendo i calcoli, otteniamo $2\frac{x_0x}{a^2}-2\frac{y_0x}{b^2}=2$, cioè:

$$(\#\#)\ \frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

Questa è dunque l'equazione della tangente t a γ' nel suo punto $H=(x_0,y_0)$.

Esempio

Data l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{2}-y^2=1$, sia H il suo punto di coordinate (2,1).

L'equazione della tangente t in H è allora: $\frac{2x}{2}-y=1$, ossia $x-y=1$.

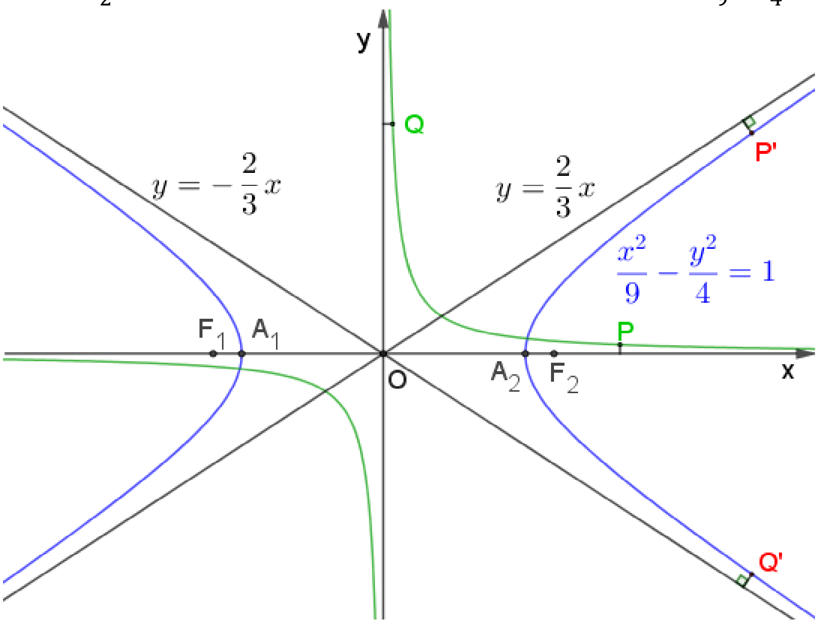
Per le tangenti a γ' in un punto a essa esterno valgono le considerazioni già fatte per l'ellisse.

Asintoti dell'iperbole sotto la forma canonica

Per ottenerli trasformiamo le rette di equazione $y=0$ e $x=0$, che sono gli asintoti per l'iperbole di equazione $y=\frac{1}{x}$, mediante le sostituzioni $x\to\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ e $y\to\frac{x}{a}-\frac{y}{b}$, usate per avere l'equazione canonica dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ nel grafico successivo).

Poiché per l'iperbole di equazione $y=\frac{1}{x}$ $y=0$ è asintoto orizzontale: per $x\to+\infty$ la distanza **d** del punto $P=(x,\frac{1}{x})$ dall'asse $\vec{x}$ tende a zero. Allora, dato che un'affinità muta una retta in una retta e conserva l'appartenenza, $y=0$ – che passa per O - mediante α_1, si trasforma nella retta a_1 per O di equazione $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$, cioè $y=\frac{a}{b}x$ (in figura $y=\frac{3}{2}x$). Inoltre, in un'affinità le distanze non si conservano ma cambiano al finito; così, la distanza di P' associato di P in α_1 diviene **d'**=**hd**, **con h≠0**; di conseguenza, per $x\to+\infty$, **d**→0 e quindi **d'**→0:

la retta $\mathbf{a_1}$ di equazione $y=\frac{3}{2}x$ è allora asintoto per l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$.



Con analoghe argomentazioni, $x=0$ si trasforma in a_2: $y=-\frac{3}{2}x$.

Poiché le equazioni di a_1 e a_2 sono di tipo generico (per l'origine), le rette da cui sono rappresentate sono dette asintoti obliqui per l'iperbole.

Due ultime osservazioni.

- Nei testi scolastici le equazioni delle tangenti che ho determinato sono chiamate "formule di sdoppiamento", delle quali non si presenta una dimostrazione.
- Esse risultano quelle che si ottengono negli studi universitari pensando le equazioni delle coniche come funzioni di due variabili del tipo $f(x,y)=0$, di cui sia γ il grafico. Calcolandone le derivate parziali nel punto $P_0=(x_0,y_0)$ di $f(x,y)$ si trovano i coefficienti dell'equazione della tangente in $P_0=(x_0,y_0)$.

A questo punto ritengo che quanto scritto abbia chiarito a sufficienza lo scopo di questo lavoro.

Giarre 1/11/2020

Alfio Grasso

Email: grassoalfino@yahoo.it